3°/ Soit $x>0$ et $\psi(x)=\dfrac{2x+1}{2x(x+1)}+\ln(\dfrac{x}{x+1})$

a) Etudier le signe de $\psi(x)$.

b) Prouver que $f_n(2n \ \ln(\dfrac{n}{n+1})=\dfrac{2n}{n+1}\psi(n)$.

4°/a) Montrer alors que $x_n<2n \ \ln(\dfrac{n}{n+1})$.

b) En déduire que la suite de terme général $x_n$ admet une limite finie que l'on calculera.

**Exercice 9 :**

Soit $n$ un entier naturel non nul.

Soit la fonction $f_n$ définie par : $\forall x>0,\ f_n(x)=xe^{\frac{-1}{nx}}$ et $f_n(0)=0$.

1°/ Etudier les variations de $f_n$.

2°/a) Montrer que $\forall t>0,\ 0\le e^{-t}-(1-t)\le\dfrac{t^2}{2}$.

b) En déduire que $\forall x>0,\ 0\le f_n(x)-(x-\dfrac{1}{n})\le\dfrac{1}{2n^2x}$.

3°/a) Montrer que la droite $D_n$ d'équation $y=x-\dfrac{1}{n}$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C}_n)$ représentative de $f_n$.

b) Préciser la position de $(\mathcal{C}_n)$ et $D_n$.

c) Tracer $(\mathcal{C}_1)$.

4°/a) Montrer que l'équation (★) : $f_n(x)=1$ a une seule solution $\alpha_n$ dans $]0,+\infty[$.

b) Montrer que $\alpha_n$ est une solution de l'équation $x \ \ln x=\dfrac{1}{n}$.

5°/a) Montrer que $(\alpha_n)_{n\ge1}$ est une suite décroissante.

b) Montrer que $(\alpha_n)_{n\ge1}$ est convergente vers un réel que l'on calculera.